複素幾何メモ

@dchiji

2014 年 8 月 9 日

本メモにおいて近傍といったら開近傍のことである．(実) 多様体には慣れ親しんでいることを仮定している．([松島] の二章くらい．) 分からない Notation がある場合は [堀川] を見てみるか，直接言ってもらえると助かります．

1 多変数関数論

定義 1.1 (正則関数)**.** U を $\mathbb{C}^m$ の開集合とする．写像 $f : U \to \mathbb{C}$ が U の各点 p において冪級数展開可能なとき，f は U 上の正則関数であると言う．

1.1 層

層はそういうもの．(あとで書く)

1.2 Weierstrass の局所理論

$\mathcal{O}_m$ によって $\mathbb{C}^m$ の構造層 (=正則関数の芽のなす層) を表すことにする．また，$\mathcal{O}_m$ の点 $p \in \mathbb{C}^m$ における germ f_p と p の十分小さい近傍 U_p で定義された正則関数 f とをしばしば同一視する．$\mathcal{O}_{m,0}$ は標準座標によって $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_m\}$(=$m$ 変数の収束冪級数環) に環として同型である．$\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_{m-1}), w = z_m$ とおくと $\mathbb{C}\{\mathbf{z}, w\} = \mathcal{O}_{m,0} = \mathcal{O}_{m-1,0}\{w\}$ となり，$\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$ 係数の一変数収束冪級数環と思える．

定義 1.2. $f(\mathbf{z}, w) \in \mathbb{C}\{\mathbf{z}, w\}$ に対し，$f(0, w) \in \mathbb{C}\{w\}$ の最低次の次数を f の w に関する位数 (order) と呼ぶ．これを $\operatorname{ord} f$ と書く．

次の定理によって，収束冪級数が多項式に類似した性質を持っていることが分かる．

定理 1.1 (Weierstrass の割り算定理)**.** $f, g \in \mathbb{C}\{\mathbf{z}, w\}$ とする．g の w に関する位数が $b < \infty$ のとき，次を満たす $q \in \mathbb{C}\{\mathbf{z}, w\}, r \in \mathbb{C}\{\mathbf{z}\}[w]$ が一意的に存在する．

$$f = qg + r \quad \text{かつ} \quad \deg r < m$$

この定理は重要であるが証明は省略する．[CAS] に $\mathcal{O}_{m,0}$ の Banach 代数の構造を利用した簡潔な証明がある．次の「準備定理」は，たとえば解析的部分集合を考えるときに (収束冪級数係数の) 多項式で定まっていると思えるということである．

定理 1.2 (Weierstrass の準備定理)**.** $f \in \mathbb{C}\{\mathbf{z}, w\}, \operatorname{ord} f < \infty$ に対し，次を満たす $e \in \mathbb{C}\{\mathbf{z}, w\}, \omega \in \mathbb{C}\{\mathbf{z}\}[w]$

が一意的に存在する．

$$f = e\omega \qquad \text{かつ} \qquad e \text{ は } \mathcal{O}_{m,0} \text{ の単元，} \omega \text{ は変数 } w \text{ に関して Weierstrass 多項式である．}$$

ここで $\omega \in \mathbb{C}\{\mathbf{z}, w\}$ が w に関する Weierstrass 多項式であるとは，ω を $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$ 係数の w に関する収束冪級数と思ったときに，実際には (w に関して) モニックな多項式であって w に関する位数が多項式の次数に一致していることを言う．すなわち，$\omega(\mathbf{z}, w) = w^k + h_{k-1}(\mathbf{z})w^{k-1} + \cdots + h_0(\mathbf{z})$ と表せて $h_i(0) = 0$ を満たしているということである．

証明. $b := \mathrm{ord}\, f$ とおく．割り算定理より $w^b = qf + r$ なる q, r が取れる．$\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_{m-1}) = (0, \ldots, 0)$ を代入すると，w に関する次数を比較することで $q(0,0) \neq 0,\ r(0,w) = 0$ が分かる．すなわち q は $\mathcal{O}_{m.0}$ の単元で，$w^b - r(\mathbf{z}, w)$ は Weierstrass 多項式なので，$f = q^{-1}(w^b - r)$ を得る．

一意性について．$f = e\omega$ とおくと両辺に $\mathbf{z} = (0, \ldots, 0)$ を代入して w に関する次数を比較することで，ω の w に関する次数が b に一致することが分かる．よって存在証明の議論を逆に辿れば，割り算定理における一意性から従う． ■

$f \in \mathcal{O}_{m,0}$ に準備定理を適用するためには，原点を保つ適当な座標変換によって $\mathrm{ord}\, f < \infty$ とならなければいけない．実は恒等的に 0 ではない任意の f に対してこのような座標を選ぶことができる．まずは標準座標系 $(z_1, \ldots, z_{n-1}, w)$ についての f の冪級数展開を $f(z_1, \ldots, z_{n-1}, w) = \Sigma_{k=b}^{\infty} h_k(z_1, \ldots, z_{n-1}, w)$ とおく．ここで $h_b \neq 0$ とし，k 次の斉次部分を h_k と書いた．任意の $(c_1, \ldots, c_{n-1}) \in \mathbb{C}$ に対して $z'_j := z_j - c_j w$ という変換を考えると，$f(z'_1, \ldots, z'_{n-1}, w) = \Sigma_{k=b}^{\infty} h_k(z'_1 + c_1 w, \ldots, z'_{n-1} + c_{n-1}w, w)$ なる展開を得る．このとき $f(\mathbf{z}' = 0, w) = \Sigma_{k=b}^{\infty} h_k(c_1, \ldots, c_{n-1}, 1)w^k$ だから，$h_b(c_1, \ldots, c_{n-1}, 1) \neq 0$ なる $(c_1, \ldots, c_{n-1})$ を選べば，$\mathrm{ord}\, f = b < \infty$ となる．

補題 1.1. $\mathcal{O}_{m-1,0}[w]$ の素元は $\mathcal{O}_{m,0} = \mathcal{O}_{m-1,0}\{w\}$ の素元である．

定理 1.3. $\mathcal{O}_{m,0}$ は UFD である．

定理 1.4. $\mathcal{O}_{m,0}$ は Noether 的である．

1.3 Riemann の拡張定理

Weierstrass の準備定理の応用として，次の定理がある．

定理 1.5 (Riemann の拡張定理)**.** $D \subset \mathbb{C}^m$ を領域，φ を D 上の 0 でない正則関数とする．$\Sigma := \{x \in D : \varphi(x) = 0\}$ とおく．すると $D \setminus \Sigma$ 上の有界な正則関数 f は D 上の正則関数に拡張される．

系 1.5.1. D を $\mathbb{C}^m$ の領域，f を D 上の正則関数，$S := \{f = 0\}$ とすると，$D \setminus S$ は連結．

実ユークリッド空間から余次元 1 の部分空間を除くと連結性が崩れることがあるが，複素空間とその超曲面を実次元で見ると次元 2 の差があるため，事情が異なるということである．

1.4 解析的部分集合

(a) 非特異点集合

定義 1.3 (m 次元複素多様体). M が m 次元複素多様体であるとは，実 $2m$ 次元多様体で貼り合わせ関数が ($\mathbb{R}^{2m} = \mathbb{C}^m$ 上の写像として) 双正則写像になっていることをいう．ここでは単に複素多様体と言うときには，連結性も仮定する．

定義 1.4 (k 次元部分多様体). M の部分集合 N が k 次元部分多様体であるとは，N の各点 p について，p の十分小さい近傍 U_p とその上の座標 $(z_1, \cdots, z_m)$ であって

$$N \cap U_p = \{q \in U_p : z_{k+1}(q) = \cdots = z_m(q) = 0\}$$

なるものが存在することを言う．このとき N には $(U_p, z_1 \cdots z_k)$ を p の座標近傍とするような k 次元複素多様体の構造が入る．

M の部分集合であって，局所的に M 上の正則関数たちの零点集合となっているものを M の解析的部分集合と呼ぶ．

定義 1.5 (解析的部分集合). $Z \subset M$ が解析的部分集合 (あるいは解析的多様体 (analytic variety)) であるとは，Z の各点 p についてその近傍 U であって，$Z \cap U$ が M の複素部分多様体となるようなものが存在することである．

たとえば部分多様体は解析的部分集合であるが，一般に解析的部分集合は特異点 (=その任意の近傍も M の部分多様体でないような点) も許容する．そこで $\operatorname{Reg} Z := \{Z$ の非特異点全体 $\} := \{q \in Z : q$ の十分小さい近傍 U_q があって $Z \cap U_q$ は M の k_q 次元部分多様体 $\}$ とおいておく．次の定理は最も基本的である．

定理 1.6. Z を M の解析的部分集合とすると，$\operatorname{Reg} Z$ は Z の稠密な部分集合である．

証明. $Z = \emptyset$ の場合は明らかだから $Z \neq \emptyset$ とする．M の次元 m に関する帰納法で証明する．$U \subset \mathbb{C}$ 上の正則関数の零点集合は U 自身または離散部分集合 (=0 次元部分多様体) のどちらかに限るから，いずれの場合も非特異である．よって $m = 1$ のときは $\operatorname{Reg} Z = Z$ が成立し，とくに定理の主張は正しい．

次に，$m-1$ 次元複素多様体について定理の主張が正しいと仮定しよう．ここで各 $p \in Z$ に対して次のイデアルを導入する．

$$\mathcal{I}_p := \{f \in \mathcal{O}_{m,p} : f \text{ は } p \text{ の } Z \text{ における十分小さい近傍上で } 0\}$$

$\mathcal{O}_{m,p}$ の Noether 性から，$\mathcal{I}_p = (g_1, \cdots, g_l)$ と表せる．$g_1, \cdots, g_l \in \mathcal{O}_{m,p}$ であるが，p の十分小さい近傍 U_p を取ってその上の正則関数と思える．また準備定理によって，U_p を小さくしながらその上の座標系 $(z_1, \cdots, z_{m-1}, w)$ を上手く取り，$g_1, \cdots, g_l$ を w に関する Weierstrass 多項式として良い．($\mathcal{I}_p$ の生成元であれば良いから．)

<u>Claim.</u> $\partial g_i / \partial w$ が $Z \cap U_p$ 上恒等的に 0 ではないような $i = 1, \cdots, l$ がある．

<u>Claim の証明.</u> どの i についても $\partial g_i / \partial w \equiv 0$ が $Z \cap U_p$ 上で成り立っていたと仮定する．そうすると

$\partial g_i/\partial w \in \mathcal{I}_p$ となり，$h_1, \cdots, h_l \in \mathcal{O}_{m,p}$ によって

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_i}{\partial w} &= \sum_{i=1}^{l} h_i g_i, \\ \frac{\partial^2 g_i}{\partial^2 w} &= \sum_{i=1}^{l}(\frac{\partial h_i}{\partial w} + \sum_{j=1}^{l} h_i h_j) g_i \\ &= \sum_{i=1}^{l} h'_i g_i \in \mathcal{I}_p,\end{aligned}$$

これを繰り返せば，$\partial^m g_i/\partial^m w \in \mathcal{I}_p$ が分かる．しかし g_i は w に関してモニックな多項式だったから，$\partial^{\deg g_i} g_i/\partial w^{\deg g_i} = (\deg g_i)! \in \mathcal{I}_i$ である．これは $Z = \emptyset$ を意味するから $Z \neq \emptyset$ に反する． □

上の Claim により，たとえば $\partial g_1/\partial w \not\equiv 0$ として良い．すると $Z' := \{q \in U_p : g_1(q) = 0\}$ は $m-1$ 次元の非特異点をもつ．$g_1 \in \mathcal{I}_p$ より (U_p を十分小さく取れば)$Z \cap U_p$ は Z' の解析的部分集合だから，帰納法の仮定より $Z \cap U_p$ は非特異点をもつ． ■

補題 1.2. f を $\mathcal{O}_{m,p}$ の素元，g を $\mathcal{O}_{m,p}$ の元で f と互いに素なるものとする．このとき p の任意の近傍 U に対して，$q \in U$ で次を満たすものが存在する．

$$\begin{aligned}&f(q) = 0, (df)_q \neq 0, \\ &g(q) \neq 0\end{aligned}$$

証明. 終結式の性質を用いる．(途中) ■

命題 1.1. 解析的超曲面 Z の任意の非特異点における余次元は 1 である．すなわち，解析的部分集合 Z の各点 p の近傍 $Z \cap U_p$ において $Z \cap U_p = \{q \in U_p : f(q) = 0\}$ なる 0 でない正則関数 $f \in \mathcal{O}(U_p)$ が取れるとき，Z の任意の非特異点における余次元は 1 である．

証明. $p \in \operatorname{Reg} Z$ を任意に取る．$f_p = u_p(\varphi_1)_p^{m_1} \cdots (\varphi_l)_p^{m_l}$，(ここで u_p は単元を表す．) を $\mathcal{O}_{m,p}$ における素元分解とすれば，補題 1.2 より，p に十分近い q で $\varphi_1(q) = 0$，$(d\varphi_1)_q \neq 0$ を満たす点が取れる．$Z' := \{\varphi_1 = 0\} \subset Z$ は q の近傍で非特異かつ余次元 1 であり，(p に十分近く取ることで)$q \in \operatorname{Reg} Z$ とできるから，$\operatorname{Reg} Z$ の q を含む連結成分の余次元は 1 以下である．ここで f は 0 でない正則関数だったから，余次元は 1 となる． ■

(b) 既約性と $\operatorname{Reg} Z$ の連結性

次に $p \in \mathbb{C}^m$ とし，$\mathcal{O}_{m,p}$ の素元 f の (p のまわりの) 零点の様子を調べよう．たとえば $f(z, w) = z^2 - w^3$ は $\mathcal{O}_{2,0}$ の素元 (これは $w^{\frac{3}{2}}$ が原点の近傍で定義出来ないことから従う．) だが原点は特異点である．ところで，$z^2 - w^3 = 0$ で定まる図形から特異点 0 を取り除いても，原点の近傍で連結のままである．これはたとえば $zw = 0$ で定まる図形から特異点 0 を取り除くと連結でなくなる事実を考えれば，自明なことではない．この現象に関して次の定理がある．

定理 1.7. $U \subset \mathbb{C}^m$ を p の近傍，f を p において素元であるような U 上の正則関数とする．$Z := \{q \in U : f(q) = 0\}$ とおく．このとき十分小さい p の近傍 V を取れば，$\operatorname{Reg} Z \cap V$ は連結である．

補題 1.3. $\mathbb{C}^m$ の標準座標を $(\mathbf{z}, w)$ とし，$(1,\ldots,n-1)$ 成分の射影を $\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-1} : (\mathbf{z}, w) \mapsto \mathbf{z}$ とする．w に関する $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$ 係数多項式 f が $\mathbb{C}\{\mathbf{z}, w\}$ において素元のとき，十分小さい正数 ϵ, δ があって $\Omega := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{n-1} : |z_j| < \delta,\ j = 1,\ldots,n-1\}$，$V := \Omega \times \{|w| < \epsilon\}$ とおくと次が成立する．

$Z := \{(\mathbf{z}, w) \in V : f(\mathbf{z}, w) = 0\}$，$Z' := \{(\mathbf{z}, w) \in Z : {}^{\#}\pi^{-1}(\{\mathbf{z}\}) = m\}$ とおくと，Z' は非特異な解析的部分集合で $\pi|_{Z'}$ は局所双正則写像となる．また Z' は $\operatorname{Reg} Z$ の稠密な部分集合である．

証明. $\omega(\mathbf{z})$ を f の w に関する終結式，つまり $R(f, \partial f/\partial w)$ とし，$\Omega' := \{\mathbf{z} \in \Omega : \omega(\mathbf{z}) \neq 0\}$，$Z' := \pi^{-1}(\Omega')$ とする．(途中) ■

(定理 1.7 の証明). ■

2 Cartier 因子

以下 M によって m 次元複素多様体を表すことにする．

2.1 Weierstrass の乗法定理

定義 2.1. $\mathcal{O}$ を M の構造層, $\mathcal{K}$ を $\mathcal{O}$ の全商環の層とする．このとき可換群の層 $\mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*$ の大域切断を Cartier 因子と呼ぶ．

注意 2.1.1. このとき，次の層の完全列がある．

$$0 \to \mathcal{O}^* \to \mathcal{K}^* \to \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^* \to 0$$

この大域切断を取って次の完全列を得る．

$$0 \to \mathcal{O}^*(M) \to \mathcal{K}^*(M) \to (\mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*)(M)$$

このときに残りの列 $\mathcal{K}^*(M) \to (\mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*)(M) \to 0$ が完全になるかという問題は Cousin II 問題と呼ばれるもので，Weierstrass の乗法定理の多変数版と考えられる．

Cartier 因子を与えることは，有理型関数 (正則関数) の因数の分布を与えることと等価である．

2.2 Cartier 因子と直線束

L を $m+1$ 次元複素多様体とする．上への正則写像 $\pi : L \to M$ が M 上の正則直線束であるとは，M の開被覆 $\{U_i\}$ で各 U_i に対して双正則写像 $\varphi_i : L|_{U_i} \to U_i \times \mathbb{C}^1$, (ここで $L|_{U_i} := \pi^{-1}(U_i) \subset L$) が取れるものがあって，かつ次を満たすことを言う．

1. φ_i は π と compatible である．つまり φ_i は射影 $P_{U_i} : U_i \times \mathbb{C} \to U_i$ に対して $P_{U_i} \circ \varphi_i = \pi$ を満たす．
2. M の各点のファイバーは φ_i によって線形空間になる．つまり M の各点 p に対して，その L への引き戻し $L|_p := \pi^{-1}(\{p\})$ には $\varphi_i|_{L|_p} : L|_p \to \{p\} \times \mathbb{C} \cong \mathbb{C}$ を同型写像とするような $\mathbb{C}$ 上の線形空間の構造が入っている．

このような開被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ のことを，L の局所自明化開被覆という．二つの局所自明化近傍 U_i, U_j の共通部分が空でないとき，次の双正則写像を得る．

$$U_i \cap U_j \times \mathbb{C} \xrightarrow{\varphi_i^{-1}} L|_{U_i\cap U_j} \xrightarrow{\varphi_j} U_i \cap U_j \times \mathbb{C}$$

この写像を $U_i \cap U_j$ の各点 x のファイバーに制限すれば，線形同型写像 $g_{ji}(x) : \{x\} \times \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \{x\} \times \mathbb{C}$ を得る．この同型写像は $GL_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ の元に同一視できるから，$g_{ji} : U_i \cap U_j \to \mathbb{C}^*$ を得る．この写像が正則であることは容易に確認できる．また，$g_{ik} = g_{ij}g_{jk}$ も分かる．実は逆に，これを満たすような $\{g_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathbb{C}^* : \text{正則写像}\}_{i,j\in I}$ から L を復元することができる．よって以下において，正則直線束 L と $\{g_{ij}\}_{i,j\in I}$ を同一視する．

L は複素多様体であるから，正則写像 $M \to L$ を考えることができる．正則写像 $s : M \to L$ が π と compatible なとき，s を L の (大域) 正則切断という．(「切断」の由来については絵を描いてみると分かると思う．)

さて，前の議論によって L と $\{g_{ij}\}$ を同一視したから，今度は正則切断の定義の $\{g_{ij}\}$ に関する定式化を考えよう．まず s が満たす性質として次がある．

各 $i \in I$ について
$$s_i := s|_{U_i} : U_i \to L|_{U_i} \xrightarrow{\varphi_i} U_i \times \mathbb{C} \xrightarrow{\text{projection}} \mathbb{C}$$
とおくと，$s_i = g_{ji}s_j$ を満たす．

逆に $\{s_i : U_i\text{上の正則関数}\}_{i\in I}$ が上を満たすとき，L の正則切断で $s|_{U_i} = s_i$ を満たすものが一意に存在することが分かる．(一意性は明らか．存在はそれぞれの s_i を貼り合わせれば良い．) これによって s と $\{s_i\}$ を同一視する．

まとめると正則直線束とは $\{g_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_{ij})\}$ with $g_{ik} = g_{ij}g_{jk}$ のことであり，その正則切断とは $\{s_i \in \mathcal{O}(U_i)\}$ with $s_i = g_{ij}s_j$ のことである．このように定式化すれば，直線束の正則切断というのは正則関数の集まりに過ぎないから，これを有理型関数の集まりに拡張することができる．つまり，有理型切断 $\{\phi_i \in \mathcal{K}(U_i)\}$ というのを，$\phi_i = g_{ij}\phi_j$ on $U_i \cap U_j$ なるものと定義する．これは定義から Cartier 因子に他ならないから，標語的にいえば，正則直線束の有理型切断は Cartier 因子である．

逆も容易に分かる．すなわち，Cartier 因子 D が与えられれば，それが有理型切断となるような正則直線束 L が存在する．$D = \{(U_i, \alpha_i/\beta_i)\}_{i\in I}$ において $\alpha_i/\beta_i = g_{ij}\alpha_j/\beta_j$ なる変換関数 $g_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$ があるから，これから定まる直線束 $[D]$ を L とすれば良い．この $D \rightsquigarrow [D]$ の対応は同型の差を除いて一意的である．また，$L \overset{\text{有理型切断}}{\rightsquigarrow} D \rightsquigarrow [D]$ とすると $L \cong [D]$ が分かる．(直線束の同型というのは定義していないが，L を定めている変換関数 (行列) g_{ij} の値は値域 $\mathbb{C}$ の標準基底 1 の選び方によって変わってくるから，その差が (holomorphic な) 基底変換の分しか無いときは線形代数の意味で同じと思えるので，このときに直線束として同型であるという．)

2.3 Cartier 因子と Weil 因子

これまでに見てきたように，Cartier 因子は「因数の分布」あるいは「正則直線束の有理型切断」という関数論的なものを表していたが，幾何学的には余次元 1 の解析的部分集合をいくつか合わせたものと見ることもできる．本節では [堀川] の第三章に沿ってこのことを説明する．

次の補題は「互いに素」な性質が連接的 (?) であることを主張するもので，Cartier 因子を解析的部分集合として実現する際に基本的である．証明には (準備定理によって多項式レベルに落として) 終結式の一般論を用いる．

補題 2.1. $U \subset \mathbb{C}^m$ を原点の近傍，$f, g \in \mathcal{O}_m(U)$ を原点における芽 f_0, g_0 が互いに素であるとする．このとき U を十分小さく取ると，任意の $q \in U$ について f_q, g_q が互いに素となるようにできる．

$\mathcal{O}_{m,0}$ が UFD であることと上の補題を用いると次を示すことができる．

命題 2.1. D を M 上の Cartier 因子とすると，M の開被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ を十分細かく取ることで $D = \{(U_i, \alpha_i/\beta_i)\}_{i\in I}$ を α_i, β_i が U_i 上互いに素であるように出来る．

3 Weil 因子

4 Kähler 多様体

参考文献

[CAS] H.Grauert and R.Remmert, “Coherent Analytic Sheaves,” 1984.
[松島] 松島 与三, “多様体入門,” 1965.
[堀川] 堀川 潁二, “複素代数幾何学入門,” 1990.
[大沢 1] 大沢 健夫, “多変数複素解析,” 1998.
[大沢 2] 大沢 健夫, “複素解析幾何とディーバー方程式,” 2006.